51. В чем состоит принцип сведения краевых задач к вариационным задачам (принцип Дирихле)?
52. Как ставится вариационная задача на собственные значения?
53. Что такое вариационные и что такое проекционные алгоритмы? Приведите примеры.
54. В чем состоит метод Ритца?
55. Что такое энергетическое пространство? В каком случае его можно построить?
56. Какие краевые условия называются главными, и какие естественными?
57. В каких случаях метод Ритца неприменим?
58. В чем состоит метод Галеркина?
59. В чем состоит обобщенный метод моментов?
60. В чем состоит метод наименьших квадратов?

51. В чем состоит принцип сведения краевых задач к вариационным задачам (принцип Дирихле)?

Принцип заключается в том, что мы решение ДУ (с ГУ, естественно) заменяем поиском минимума какого-то функционала.

Например, вместо $\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D; \\ u(P) = \phi(P), & P \in \Gamma. \end{cases}$

ищем минимум функционала – т.н. интеграла Дирихле:

$$D[u(x,y)] = \int\limits_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.

Зачем нам вместо того, чтобы решать ДУ, искать минимум какого-то функционала? Вы правы – в данном случае это шило на мыло, в отличие от следующей задачи – задачи Ш-Л:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & M \in D; \\ u(P) = 0, & P \in \Gamma; \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}$$

Которую можно заменить на такую вариационную задачу, с функционалами

$$J[u] = \frac{D[u]}{H[u]}, \quad \text{где} \quad H[u] = \int\limits_D u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

В чём тут соль? У нас в ДУ есть параметр, у нас задача на собственные значения! Если раньше мы могли просто сделать сетку и точечными шаблонами всё просчитать, то тут у нас в ДУ параметр. Что будем делать? Перебирать 100500 лямбд? Для 99,9% лямбд решение не подойдёт под ГУ, а

те редкие, под которые оно подойдёт, и будут СЗ. Но это чудовищно неэффективно.

Напротив, искать минимум функционала численно можно. (Далее в этом абзаце рассказ, как это делается и нафиг это нужно, этого нет у Боголюбова, если вам неинтересно, не читайте). Вводится сетка на u, и функционал превращается в функцию от N_x*N_y переменных (N_i – число точек на каждой оси). Т.е. если раньше его аргументом была функция u (Функционал[u]), то теперь – конечный (хотя и огромный, N_x*N_y, набор переменных: Функционал($u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1,N_x}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{N_x N_y}$) . А минимум функции многих переменных мы искать умеем, например, с помощью динамического метода или метода твёрдого шарика (может, был у кого на проге).

Подобная задача часто возникает при численном решении станц.ур.Шрёдингера с говно-потенциалами. Там тоже вместо дифуров считают минимум функционала.

Кстати, через функционалы находится ВСЕГО ЛИШЬ ОДНО собственное значение λ, которое всегда будет наименьшим. Это доказывал Боголюбов. Для квантов, кстати, это очень хорошо – находится состояние с наименьшей энергией, т.е. основное.

Давайте подытожим, тем более что нас тут был вопрос

52. Как ставится вариационная задача на собственные значения?

$$D[u(x,y)] = \int_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Вот поиск u, для которой функционал минимален – это ПЕРВАЯ варицонная задача, и она эквивалентна

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D; \\ u(P) = \phi(P), & P \in \Gamma. \end{cases}$$

Как вы видите, здесь СЗ значений нет.
А вот поиск u, для которой функционал

$$J[u] = \frac{D[u]}{H[u]}, \quad \text{где} \quad H[u] = \int_D u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

минимален – ВТОРАЯ вариационная задача, и она эквивалентна

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in D; \\ u(P) = 0, \quad P \in \Gamma; \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\overline{D}) \end{cases}.$$

Здесь мы видим λ, так что здесь как раз поиск СЗ есть, и именно вторая вариационная задача будет ответом на вопрос №52.

53. Что такое вариационные и что такое проекционные алгоритмы? Приведите примеры.

Вот то, что мы сейчас только что с вами разобрали – это вариационные алгоритмы. Ну функционалы – это вариационка, 4-й семестр.

А вот к проекционным методам мы сейчас перейдём.

Пусть дано уравнение:

$$\hat{A}u = f, \quad f \in \mathbb{H},$$

где $\hat{A}$ - *самосопряжённый* и *положительно определённый* оператор:

$$(\hat{A}u, v) = (u, \hat{A}v), \ u, v \in D(\hat{A}); \quad (\hat{A}u, u) \geqslant \gamma^2 ||u||^2, \ \gamma > 0, \ u \in D(\hat{A})$$

Байка от Боголюбова: чем отличается математик-теоретик от математика-прикладника? Математик-теоретик напишет $u = \hat{A}^{-1} f$ и пойдёт покурить. А для математика-прикладника по сути задача даже не начиналась – как вы будете численно обратный оператор искать? ☺

Как такое решается? Берётся система базисных функций φ_i и решение ищется в виде разложения по ним:

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i$$

Где коэффициенты a_i определяются как скалярное произведение (f, φ_i). Поэтому подобные методы и называются проекционными – функция f как бы проектируется на каждую базисную функцию.

Обратите внимание на то, что число базисных функций конечно- N. У нас всё же численные значения, а у компуктеров не может быть бесконечностей. Поэтому и u_N, а не u - u_N это приближение.

Разберём 4 очень похожих метода, решающих уравнение : $\hat{A}u = f$, метод Галёркина, метод наименьших квадратов, метод Ритца и метод моментов.

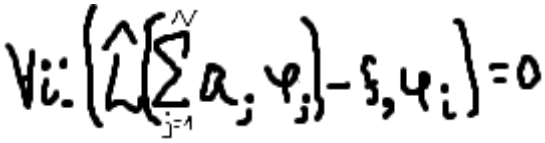
Ещё один важный нюанс! У Боголюбова, вообще говоря, везде решается уравнение $\hat{A}u + \hat{B}u = f$, а не $\hat{A}u = f$ (т.е. он зачем-то разбил один оператор на два) . И он постоянно этот оператор $\hat{B}$таскает. Но однажды ему надоедает и он вводит $\hat{L}u = \hat{A}u + \hat{B}u = f$, снова соединяя два оператора в один. А так вы можете на эту разницу между $\hat{L}$ и $\hat{A}$ забить.

58. В чем состоит метод Галеркина?

У Галёркина очень естественный метод. Он сказал: раз $\hat{L}u = f$, значит, невязка $\hat{L}u - f$должна быть ортогональна всем базисным функциям:

$(\hat{L}u - f, \phi_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., N.$

Распишем u:



И тут фишка в том, что это равенство должно выполняться для любой из N φ_i. При этом у нас неизвестно N a_j. Таким образом получаем систему из N уравнений, которую решаем.

60. В чем состоит метод наименьших квадратов?

Идея другая: раз $\hat{A}u = f$, то $(\hat{A}u_N, \hat{A}\phi_i) = (f, \hat{A}\phi_i)$. И вновь это должно выполняться для любой φ_i . Расписываем $u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i\phi_i$, подставляем, получаем N уравнений для N неизвестных a_j.

Почему, кстати, этот метод называется МНК? Да потому что он эквивалентен поиску минимума функционала:

$||\hat{A}u - f||^2$

Квадрата невязки. Если расписать скалярное произведение численно, через сумму, то и вылезет.

Единственный недостаток МНК – у оператора $\hat{A}$ должен быть обратный и он должен быть ограничен.

54. В чем состоит метод Ритца?

Очень похож на МНК. Сравните: вот это МНК

$$(\hat{A}u_N, \hat{A}\phi_i) = (f, \hat{A}\phi_i)$$

А это Ритц:

$$(\hat{A}u_N, \phi_j) = (f, \phi_j)$$

Разница лишь в том, что Ритц поленился действовать на базисные функции оператором ☺ и за это, кстати, поплатился (а лень всегда наказуема): метод Ритца применим только в тех случаях, когда оператор $\hat{A}$ самосопряжённый и положительно определённый:

$$(\hat{A}u, v) = (u, \hat{A}v),\ u, v \in D(\hat{A}); \quad (\hat{A}u, u) \geqslant \gamma^2||u||^2,\ \gamma > 0$$

Кстати, приведу пример такого оператора, если вам интересно: например, старый-добрый оператор Фредгольма $\int_a^b (f^2(x) + f^2(s) + 1)u(s)ds$, где f() – произвольная непрерывная функция. Симметричность ядра обеспечивает его самосопряжённость, а то, что оно всегда >0 – положительно определённость. Тем самым мы ответили на

57. В каких случаях метод Ритца неприменим?

Наконец, последний метод – метод моментов.

59. В чем состоит обобщенный метод моментов?

В нём вводится вспомогательный оператор $\hat{K}$. Мы его можем выбирать каким захотим, но вообще он должен быть подобран специально под оператор $\hat{A}$, чтобы выполнялись условия:

$$(\hat{A}u, \hat{K}u) \geqslant \gamma^2||u||^2, \quad (\hat{A}u, \hat{K}u) \geqslant \beta^2||\hat{K}u||^2, \quad \gamma, \beta > 0,$$

Ну а после чего получаем вновь условие ортогональности невязки всем базисным функциям φ_i: (очень похоже на Галёркина!)

$$(\hat{L}u_N - f, \hat{K}\phi_i) = 0$$

Давайте подытожим:

Метод Ритца $(\hat{A}u_N, \phi_j) = (f, \phi_j)$ только самосопряжённые пол.-определённые $\hat{A}$	Метод Галёркина $(\hat{L}u - f, \phi_i) = 0$
МНК $(\hat{A}u_N, \hat{A}\phi_i) = (f, \hat{A}\phi_i)$ только если у $\hat{A}$ есть обратный и он ограничен	Метод моментов $(\hat{L}u_N - f, \hat{K}\phi_i) = 0$

Последние два вопроса в этом файлике - абсолютная хренотень. Боголюбов развёл вокруг метода Ритца мегатеорию (видимо, это его любимый метод) и следующие два вопроса – часть этой теории.

55. Что такое энергетическое пространство? В каком случае его можно построить?

Ввели т.н. энергетическое скалярное произведение $[u, v] = (\hat{A}u, v)$, $[u] = \sqrt{[u, u]}$.

А далее смотрите что сделали. У оператора $\hat{A}$ была область определения $D(\hat{A})$. Например, если $\hat{A}$ был дифференциальный оператор, то в $D(\hat{A})$ входили дифференцируемые функции.

Так вот, это $D(\hat{A})$ взяли и пополнили по энергетической норме до $\mathbb{H}_A$, куда могут входить функции, не принадлежавшие $D(\hat{A})$! (Скажем, туда могли попасть недифференцируемые функции). Вот это вот $\mathbb{H}_A$ и есть энергетическое пространство.

56. Какие краевые условия называются главными, и какие естественными?

Естественные ГУ – это те, которым удовлетворяют функции из $D(\hat{A})$.

А когда мы $D(\hat{A})$ изнасиловали, запихнув туда всякую хрень, то мы получили неестественное пространство $\mathbb{H}_A$. ГУ, которым удовлетворяют функции из «искусственного» пространства $\mathbb{H}_A$, называются… нет, не искусственными – главными.